

Show and Prove



수리논술을 위한 Basic Logic & 수학 1

저자 소개

SaP 시리즈 저자

김기대 T

- 학력
고려대학교 수학과 (수리논술 합격 + 당해 수능 가형 100점)
- 강의
시대인재 오르비 by 매시브 인클래스 (온라인 수강 사이트)
- 저서
수능수학 : 기대모의고사, 기대 N제 저자 (2015~)
수리논술 : Show and Prove 1, 2, 3편 저자 (2023~)
대학별 분석서 (2025~, 예정)


박민서

- 학력 : 한양대학교 자연과학대학 (수리논술 합격)
- 저서 : Show and Prove 1, 2편 공동 저자 (2025~)
대학별 분석서 공동 저자 (2025~, 예정)

검토진

- 김기준 서울대학교 수학교육과 이지훈 연세대학교 공과대학 (수리논술 합격)
- 전준현 영남대학교 수학교육과 (현직 수학강사) 전지원 이화여대 뇌인지과학전공 (수리논술 합격)
- 김재서 성균관대학교 수학과 (수리논술 합격) 박민 한양대 수리논술 예비 1번 (공과대학)

기대T 교재 커리큘럼

교재명	1월~3월	4월~7월	8월~9월	10월	11월
Show and Prove (수리논술 실전개념서) & 대학별 기출 분석서	1편 : 수리논술을 위한 Basic Logic 및 수학1			연세/시립/홍익 학교별 Final 수업	수능후 학교별 Final 수업
	2편 : 수리논술을 위한 수학2 & 미적분				
	3편 : 수리논술을 위한 Advanced 미적분 & 고난도 Theme				
	4편 : 수리논술을 위한 선택확통과 선택기하 (수강생 전용)				
	대학별 기출 분석서 (25년 예정)				
대학별 Final 교재 및 모의고사	대학별 Final 수업 전용 교재				
- 학습 기간은 한 권 기준 4주를 넘기지 않는 것이 좋습니다. - 음영 구간은 ‘학습 권장 시즌’을 의미합니다. - 자세한 교재설명이나 출간 소식은 오른쪽 QR코드를 참고 해주세요.					

1. 학습 전 사전공부 권장량

1편 수리논술을 위한 Basic logic & 수학 1

고1 수학 학습 + 수학1 학습 + 수학2 & 미적분 기본개념 1회독

2편 수리논술을 위한 수학 2 & 미적분

본 시리즈 1편 학습 + 1편 권장량 누적 + 수학2 & 미적분 학습

3편 수리논술을 위한 Advanced 미적분 & Advanced Theme

본 시리즈 2편 학습 + 2편 권장량 누적

4편 수리논술을 위한 선택확통와 선택기하 (수강생 전용)

선택확통, 선택기하 기본개념 1회독 (수강생들에게 기본개념&문풀강의 제공)

+ 수리논술 대학별 기출 분석집 (2025년 예정)

본 시리즈 1편 ~ 3편 학습 권장

2. 해설집 활용법

항상 해설집을 옆에 두고 공부하세요.

또한 예제와 실전 문제에 있는 별표는 다음과 같이 활용하면 됩니다.

별표	설명	고민 정도	고민 시간
★☆☆☆☆	직전에 배운 개념을 가볍게 확인하기 위한, 쉬운 문제	매우 빠르게	3분 이내
★★☆☆☆	빈출하는 주제이면서 평이한 난이도의 문제	빠르게	5~10분 이내
★★★☆☆	실전 문제로 나오는 수준의 난이도이며, 고민 시간을 투자할 가치가 충분히 있는 고난도 문제	넉넉히	10~15분 이내
★★★★☆	합격자조차도 승률이 50% 이하인 매우 어려운 문제		15~20분 이내
★★★★★	못 풀어도 합격이 가능할 만큼, 도전과 배움에 의의를 둔 초고난도 문제. 적당한 고민 후 해설로 빠른 학습 권장	빠르게	10분 이내
꼭 고민 시간을 지키지 않아도 됩니다.			

01

개념 & 예제

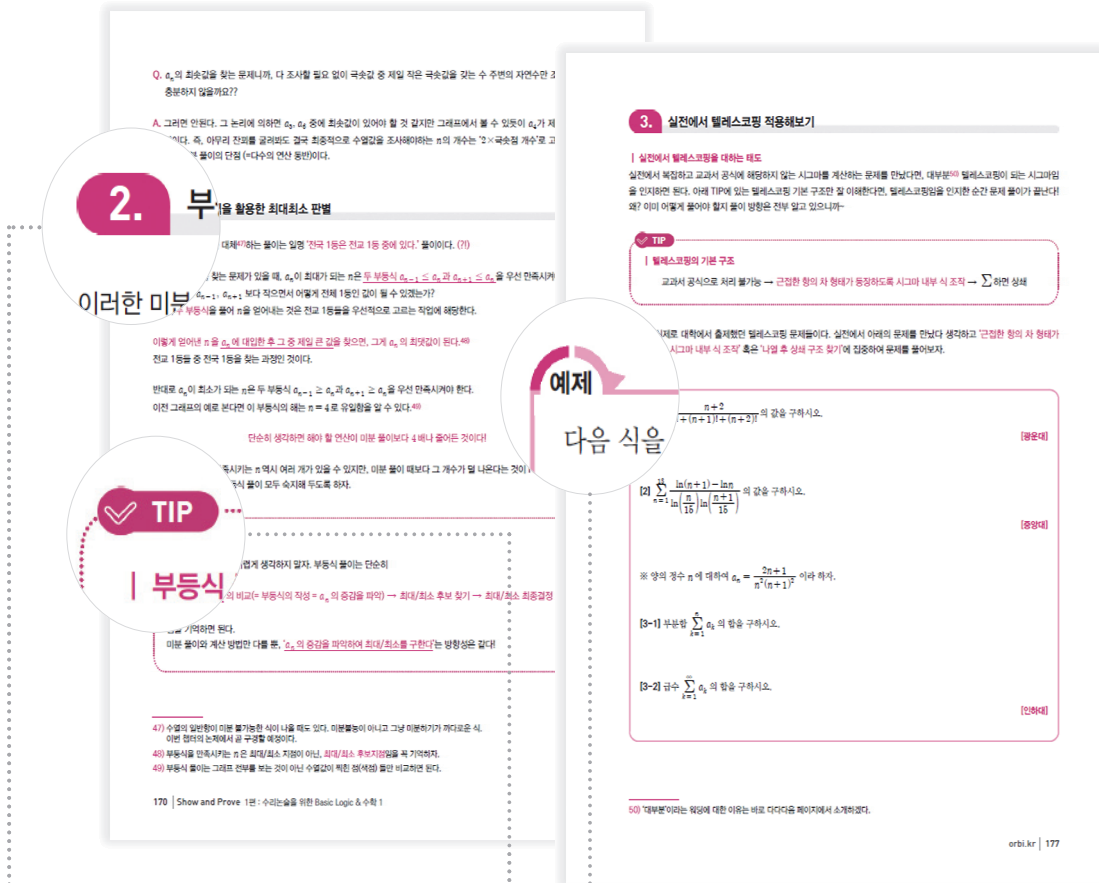
단원별 수리논술용 빈출 주제의 학습으로 ‘수리논술용 필수 개념’ 완성!

개념 : 수리논술 전형을 지원하는 학생이라면 꼭 알아야 할 필수 개념들을 정리하였습니다.

단순히 어렵고 처음 접하는 개념을 수록한 것이 아닌, **실제 출제되었던 대한민국 수리논술 문제를 기반으로** 필수 개념을 선정 후 수록하였습니다.

예제 : 개념을 배운 그 자리에서 바로 문제에 개념을 적용해볼 수 있도록 예제를 수록하였습니다.

쉬운 기출 + 자작문항으로 이루어져 있으며, **개념을 체화하기 좋은 문항**으로 선정하였습니다.



① 필수 개념

수리논술용 필수 개념을 대단원 내에서 중단원 - 소단원 형식으로 정리하였습니다.

② TIP 박스

각 개념에서 얻어야 할 핵심 내용 혹은 개념 학습 시 헛갈릴만한 내용을 수록하였습니다.

③ 예제

앞에서 배운 개념을 그 자리에서 바로 확인할 수 있는 문제입니다.

앞에서 배운 개념을 ‘바로 확인’ & ‘마무리 짓는’ 문제와 해설 수록!

논제 : 대단원을 마무리하며 필수 개념들을 실제 출제되었던 수리논술 문제에 적용해볼 수 있도록, 단원별 실전 논제를 수록하였습니다. 또한, 학습자의 수학 역량과 학습 투자 시간에 따라 문제를 선별하여 풀 수 있도록, 모든 논제의 난이도를 별표로 표시해두었습니다.

해설 : 몇몇 문항의 경우, 단순 대학 해설만으로는 학습이 충분하지 않을 수 있습니다. 이러한 학습의 공백을 채우기 위해 **이해에 도움되는 여러 가지 장치들을 수록**해두었습니다.

논제 5

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ 이므로 수열의 극한의 성질 (=샌드위치 정리)에 의해

$\frac{1}{\sqrt{e}} < \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} a_n < \frac{1}{\sqrt{e}}$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} a_n = \frac{1}{\sqrt{e}}$ 이다. ② 이다.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{n} b_n \times \frac{\ln(1+b_n)}{b_n} \right) = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (\because ①, ③) \text{ 이다.}$

[Comment 1] 답안이다.
 위의 답안대로 풀기 위해 추가해줘야 한다.
 (a_n) 을 식료화하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.
 $1 + \frac{1}{(a_n)^2} = 1 + n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \leq 1 + n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$
 $= 1 + (n+1) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{2}} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$
 $= 1 + \frac{1}{(a_{n+1})^2} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{2}} < \frac{1}{(a_{n+1})^2}$
 따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 $1 + \frac{1}{(a_n)^2} \leq \frac{1}{(a_{n+1})^2}$ 만족한다. 그러므로 $a_{n+1} < a_n$ 이다. (이후 기존 답안대로 증명완료)

[Comment 2]
 해설의 마지막 줄에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{n} b_n \times \frac{\ln(1+b_n)}{b_n} \right)$ 을 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} b_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+b_n)}{b_n}$ 으로 표현하는 것은
 두 극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} b_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+b_n)}{b_n}$ 이 각각 수렴할 때만 가능하다고 교과서에 명시되었기 때문에 ①, ②의 극한이
 수렴함을 미리 구해줘야 함을 확인하자.
 보통 마지막 결과값을 구하는 과정을 체계하게 설명하기 위해 ①, ②의 극한값 같은 것들을 미리 구해놓는 센스는 필수
 가 아닌 선택의 영역이지만, 이 문제에서 이러한 센스는 선택이 아닌 필수이다.

TIP
 문제를 푸는 당시에는 미리 구해놔야 하는 것들과 정보가 무엇이 있는지 모르는 것이 당연하다. 하지만 문제를 다 문
 상태에서 답안을 쓸 때, 내 답안이 매끄럽게 읽히는 것뿐만 아니라 논리적 허자가 없는 답안이 되기 위해서 미리 작성
 해 놓아 하는 필요 정보들이 무엇이 있는지 파악 후 답안을 작성하는 것을 잘하는 학생이 논술을 잘하는 학생이다.
 이는 선천적인 수학적 머리보다 후천적인 노력에 달린 영역에 해당한다고 생각한다.
 따라서 독자들은 수리논술 공부와 답안 형식을 꾸준히 하며 실력을 증진시키도록 하자.

6 | Show and Prove 1편 : 수리논술을 위한 Basic Logic & 수학 1

Chapter 3. 삼각함수와 활용

실전 논제 풀어보기

실수 t 에 대해,

$\sin(t) \sin\left(\frac{\pi}{3} - t\right) = a \cos t$

시키는 상수 a, b, c, d 들의 집합 $\{a, b, c, d\}$ 을 하나 구하시오.

길이 1 인 정삼각형 ABC 가 있다. $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ 인 t 에 대해,
 L 을 점 A 를 중심으로 t 만큼 회전시켜 얻어진 선분을 l ,
 l 을 점 C 를 중심으로 t 만큼 회전시켜 얻어진 선분을 m ,
 A 를 점 C 를 중심으로 t 만큼 회전시켜 얻어진 선분을 n 라 하자.
 같이 선분 l 과 m 의 교점을 P , 선분 m 과 n 의 교점을 Q ,
 과 l 의 교점을 R 이라 하고, 삼각형 PQR 의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때,
 $S(t)$ 의 값을 구하시오.

und Prove 1편 : 수리논술을 위한 Basic Logic & 수학 1

④ Comment 등

해설로 부족한 내용을 설명하는 장치입니다.
 학습의 연장선이라 생각하고 꼭 읽어보시길 바랍니다.

⑤ 난이도 (= 별표)

문제의 난이도를 별표로 표시하였습니다.
 (별표에 따른 고민 시간은 교재 앞 참고)

기대T 수리논술 수업 상세안내

정규반	수업 상세 안내 (지난 수업 영상수강 가능)
정규반 - Set 1 (1주차~4주차)	<ul style="list-style-type: none"> - 수리논술만의 특징인 '답안작성 능력'과 '증명 능력'을 향상시키는 수업 - 수능/내신 공부와 다른 수리논술 공부의 결 & 방향성을 잡아주는 수업 - 수험생은 물론 강사조차 가지고 있는 '오개념'을 타파시키는 수학 전공자의 수업 - 무언가가 어려우면 쉽게 포기하는 성향을 가진 학생의 경우, 문제풀이가 위주인 Set 2부터 학습한 후 Set 1 학습 추천 (단순 난이도 : Set 1 > Set 2)
정규반 - Set 2 (5주차~8주차)	<ul style="list-style-type: none"> - 만만해 보이는 과목인 수학 1이 수리논술에서 어떻게 나오는지 배워보는 강의 - 삼각함수 & 수열의 콜라보 등 수학1의 논술형 발전성을 체감해볼 수 있는 실전 내용 수업 - 다른 Set에 비하여 난이도가 쉬운 편 : 수리논술에 입문하기 좋은 강의 Set
정규반 - Set 3 (9주차~12주차)	<ul style="list-style-type: none"> - 수리논술에서 50% 이상의 비중을 차지하는 수리논술용 미적분을 집중 해석하는 수업 - 수리논술에도 존재하는 행동 영역을 통해 고난도 문제의 체감 난이도를 낮춰주는 수업 - 대학의 모범답안을 보고도 '이런 아이디어를 내가 어떻게 생각해내지?' 라는 생각이 드는 학생들도, 납득 가능하고 감탄할 만한 문제 접근법을 제시해주는 수업
정규반 - Set 4 (13주차~16주차)	<ul style="list-style-type: none"> - 상위권 대학의 합격 당락을 가르는 고난도 주제들을 총정리하는 수업 - 출제 난이도가 높은 학교의 수리논술 합격을 바라는 학생이라면 강추
참삭 및 자료	<ul style="list-style-type: none"> - 수강 형태 (현장 vs 온라인) / 상관없이, 모든 학생들에게 참삭 제공 - 복습 시트, 손글씨 답안, 다채로운 자료 등등 오른쪽 QR코드에서 확인 가능



실전반 & Final	수업 상세 안내 (지난 수업 영상수강 가능)
실전반 - Set 1 (1주차~5주차)	<ul style="list-style-type: none"> - 수리논술 전용 확통/기하 Theme에 대하여 학습하는 강의 - 수능/내신의 빈출 Point와의 괴리감이 제일 큰 두 과목인 확통/기하의 내용을 철저히 수리논술 빈출 Point에 맞게 제단된 내용만을 다루는 Compact 강의
실전반 - Set 2 (6주차~10주차)	<ul style="list-style-type: none"> - 상위권 학교 지원자들은 꼭 알아야 하는 필수내용만 다루는 강의 - 본인에게 유리한 출제 스타일인 학교를 탐색하여 원서 지원부터 이기고 들어갈 수 있도록 하는, 대학별 출제경향 파악 수업 (모든 대학을 A그룹~D그룹으로 분류 후 분석) - 최신기출 (작년 기출+올해 모의) 중 주요 문항 선별 통해 주요대학 최근 출제 경향 파악
Semi Final 고/서/성/경 반 (수능전 & 직후)	<ul style="list-style-type: none"> - 수능 직후 시험 보는 학교들을 중점적으로 미리 공부해두기 위한 수업 - 전형적인 고난도 문제부터, 창의적인 신유형 문제까지 다양하게 만나볼 수 있는 수업 - 수능 끝나고, 주력으로 준비할 학교 선택하면 해당 학교 모의고사 1~2회분 및 해설강의 당일 제공
학교별 Final (수능전 / 수능후)	<ul style="list-style-type: none"> - 학교별 고유 출제 스타일에 맞는 문제들만 정조준하여 분석해주는 Final 수업 - 빈출 주제 특강 + 예상 문제 모의고사 응시 후 해설 & 참삭 - 고승률 문제접근 Tip을 파악하기 쉽도록 기출 선별 자료집 제공 (학교별 교재 상이)

풀이 자랑하기 이벤트

교재에 실린 문제들에 대하여, **본인만 떠올린 것 같은 개쩌는 신규 풀이** 혹은 **교재의 내용을 100% 알맞게 반영한** 모범적인 **별해라** 생각되는 풀이들을 기대T 연구소에 자랑해주세요!
(연구소의 수리논술 안목 확대 목적으로 활용되며, 추후 풀이 제공자의 실명과 함께 풀이가 게시될 예정입니다.)

기발한 풀이의 최초 제보자에겐 최소 스타벅스 기프티콘을 드리며, 풀이 완성도 및 발상의 퀄리티에 따라 치킨 기프티콘, 더 나아가서 기대T 조교 혹은 그 이상(ex. 프로젝트 동업) 섭외까지도 받으실 수 있는 절호의 기회!!

자세한 이벤트 보상 및 참여 방법은 아래 사이트의 공지사항을 참고해주세요.



목차

CHAPTER.1 수리논술의 기본기 11P

1. 답안작성법과 기호
2. 답안작성 Tip
3. 수리논술 공부 Tip
4. 실전 논제 풀어보기

CHAPTER.2 도형 성질 총망라 47P

1. 중학 도형 성질 총정리
2. 수리논술 전용 도형 성질 총정리
3. 실전 논제 풀어보기

CHAPTER.3 삼각함수와 활용 109P

1. 삼각함수의 여러 가지 기본 공식
2. 삼각함수 특수각의 확장
3. 사인함수와 코사인함수 사이의 관계
4. 사인법칙과 코사인법칙의 기본
5. 사인법칙과 코사인법칙의 활용
6. 실전 논제 풀어보기

CHAPTER.4 수열 & 시그마의 활용 153P

1. 수열의 대하는 태도와 점화식
2. 수열의 최대/최소 판별법
3. 시그마의 여러 가지 활용법
4. 실전 논제 풀어보기

CHAPTER.5 여러 가지 증명법 203P

1. 직접증명법과 간접증명법
2. 수학적 귀납법의 기본과 주의사항
3. 수학적 귀납법의 활용
4. 귀류법의 기본과 주의사항
5. 대우법의 기본
6. 실전 논제 풀어보기

CHAPTER.6 고난도 추가 논제 251P

1. 고난도 추가 논제 가이드
2. 고난도 추가 논제 풀어보기

CHAPTER.7 최신 기출 갈무리 271P

CHAPTER.1

수리논술 답안작성에 대한 기본기와 기호 사용법을 익히고, 이를 바탕으로 실전에서 어떻게 답안을 작성하여야 하는지 알아보자. 또한 앞으로의 수리논술 학습에 대한 방향성을 알아보자.

CHAPTER.2

본격적으로 수학1의 삼각함수 단원을 다루기 전, 중학교 때 배웠던 도형의 성질들을 리마인드하고 수리논술에 서만 등장하는 도형의 성질들을 새롭게 배워보자.

CHAPTER.3

수리논술에서의 삼각함수 공식들의 쓰임새에 대해 알아보자. 수능에서는 전혀 경험하지 못한 것들도 등장하므로, 새로운 공부라 생각하며 받아들이면 크게 어렵지 않을 것이다.

CHAPTER.4

논술용 수열 & 시그마 문제 풀이를 위한 마인드를 연습해보자. 일부 파트에서는 수능과 달리 '어떤 영특한 아이디어'가 필요로 하므로, 여러 기출들을 풀어보면서 이런 아이디어들을 집중 흡수하도록 하자.

CHAPTER.5

수리논술에서 자주 등장하는 수학적 귀납법, 귀류법, 대우법에 대해서 알아보자. 수능에서 자주 쓰이지 않는 증명법 파트인 만큼 각 증명법의 구조와 특징을 알아보는 것에 집중해보자.

CHAPTER.6


지금까지 학습했던 모든 CHAPTER의 내용에 대한 고난도 추가 문제입니다. 저자진이 본 교재에서 공을 제일 많이 들인 것이 바로 본 챕터의 해설 파트입니다. 문제가 어렵더라도 해설을 참고하여 학습하신다면 수리논술 실력이 엄청나게 스텝-업할 것이라 확신합니다.

CHAPTER.7

해당 교재와 관련된 최신 기출문제들을 모았습니다. 올해 모의논술 등 출판 이후 생긴 기출 문제들은 아래 사이트에서 상시 업데이트 되므로 활용하시기 바랍니다.

Show and Prove

기대T 수리논술 수업 상세안내

정규반	수업 상세 안내 (지난 수업 영상수강 가능)
정규반 - Set 1 (1주차~4주차)	<ul style="list-style-type: none"> - 수리논술만의 특징인 '답안작성 능력'과 '증명 능력'을 향상시키는 수업 - 수능/내신 공부와 다른 수리논술 공부의 결 & 방향성을 잡아주는 수업 - 수험생은 물론 강사조차 가지고 있는 '오개념'을 타파시키는 수학 전공자의 수업 - 무언가가 어려우면 쉽게 포기하는 성향을 가진 학생의 경우, 문제풀이가 위주인 Set 2부터 학습한 후 Set 1 학습 추천 (단순 난이도 : Set 1 > Set 2)
정규반 - Set 2 (5주차~8주차)	<ul style="list-style-type: none"> - 만만해 보이는 과목인 수학 1이 수리논술에서 어떻게 나오는지 배워보는 강의 - 삼각함수 & 수열의 콜라보 등 수학1의 논술형 발전성을 체감해볼 수 있는 실전 내용 수업 - 다른 Set에 비하여 난이도가 쉬운 편 : 수리논술에 입문하기 좋은 강의 Set
정규반 - Set 3 (9주차~12주차)	<ul style="list-style-type: none"> - 수리논술에서 50% 이상의 비중을 차지하는 수리논술용 미적분을 집중 해석하는 수업 - 수리논술에도 존재하는 행동 영역을 통해 고난도 문제의 체감 난이도를 낮춰주는 수업 - 대학의 모범답안을 보고도 '이런 아이디어를 내가 어떻게 생각해내지?' 라는 생각이 드는 학생들도, 납득 가능하고 감탄할 만한 문제 접근법을 제시해주는 수업
정규반 - Set 4 (13주차~16주차)	<ul style="list-style-type: none"> - 상위권 대학의 합격 당락을 가르치는 고난도 주제들을 총정리하는 수업 - 출제 난이도가 높은 학교의 수리논술 합격을 바라는 학생이라면 강추
첨삭 및 자료	<ul style="list-style-type: none"> - 수강 형태 (현장 vs 온라인) / 상관없이, 모든 학생들에게 첨삭 제공 - 복습 시트, 손글씨 답안, 다채로운 자료 등등 오른쪽 QR코드에서 확인 가능 

실전반 & Final	수업 상세 안내 (지난 수업 영상수강 가능)
실전반 - Set 1 (1주차~5주차)	<ul style="list-style-type: none"> - 수리논술 전용 확통/기하 Theme에 대하여 학습하는 강의 - 수능/내신의 빈출 Point와의 괴리감이 제일 큰 두 과목인 확통/기하의 내용을 철저히 수리논술 빈출 Point에 맞게 제단된 내용만을 다루는 Compact 강의
실전반 - Set 2 (6주차~10주차)	<ul style="list-style-type: none"> - 상위권 학교 지원자들은 꼭 알아야 하는 필수내용만 다루는 강의 - 본인에게 유리한 출제 스타일인 학교를 탐색하여 원서 지원부터 이기고 들어갈 수 있도록 하는, 대학별 출제경향 파악 수업 (모든 대학을 A그룹~D그룹으로 분류 후 분석) - 최신기출 (작년 기출+올해 모의) 중 주요 문항 선별 통해 주요대학 최근 출제 경향 파악
Semi Final 고/서/성/경 반 (수능전 & 직후)	<ul style="list-style-type: none"> - 수능 직후 시험 보는 학교들을 중점적으로 미리 공부해두기 위한 수업 - 전형적인 고난도 문제부터, 창의적인 신유형 문제까지 다양하게 만나볼 수 있는 수업 - 수능 끝나고, 주력으로 준비할 학교 선택하면 해당 학교 모의고사 1~2회분 및 해설강의 당일 제공
학교별 Final (수능전 / 수능후)	<ul style="list-style-type: none"> - 학교별 고유 출제 스타일에 맞는 문제들만 정조준하여 분석해주는 Final 수업 - 빈출 주제 특강 + 예상 문제 모의고사 응시 후 해설 & 첨삭 - 고승률 문제접근 Tip을 파악하기 쉽도록 기출 선별 자료집 제공 (학교별 교재 상이)

CHAPTER

1

수리논술의 기본기

수리논술 답안작성에 대한 기본기와 기호 사용법을 익히고,
이를 바탕으로 실전에서 어떻게 답안을 작성하여야 하는지 알아보자.
또한 앞으로의 수리논술 학습에 대한 방향성을 알아보자.

답안작성 Tip

1. 답안의 마지막은 항상 ‘문제에서 묻는 것’으로 마무리

문제에선 A 를 묻고 있는데 이와 비슷한 A' 으로 답안을 마무리 짓는 실수들을 많이 한다. 아래 예제로 알아보자.

예제

부등식 $2n - 10 > n - 5$ 을 만족시키는 자연수 n 의 해가 무수히 많음을 보이시오.

연습지

예제
해설

$2n - 10 > n + 5 \Leftrightarrow n > 15$ 이므로, (a) 위 부등식은 16 이상의 자연수 n 에 대하여 항상 성립한다.
(b) 따라서 위 부등식의 자연수 해는 무수히 많다.

‘(a)이면 (b)이다.’ 라는 명제가 너무 자명한 나머지, (a)에서 답안을 멈추는 경우가 생긴다.

반드시, 문제에서 묻는 것을 답하는 (b)까지 반드시 적어주는 습관을 들이자. 논리의 자명함이 나에게만 자명하고 문제에 따라 채점관에게 자명하지 않을 수 있기 때문에, 감점이 발생할 수 있다.

답안이 긴 어려운 문제일수록 ‘거의 다 왔다.’는 안도감 때문에 발생하는 실수이니 유의하도록 하자.

2. 답안 논리에 필요한 필수개념은 반드시 언급하기

$g(0)=-\frac{1}{2}, g(1)=\frac{1}{2}$ 로 $g(0) \neq g(1)$ 이고, 함수 $f(x)$ 가 *
닫힌구간 $[0,1]$ 에서 연속이고, 열린구간 $(0,1)$ 에서 미분가능하므로 **
 $g(c)=0$ 인 실근 c 가 열린구간 $(0,1)$ 에 적어도 하나 존재한다. ***

[실제 답안 중 일부]

문제는 보지 않았지만, 위 답안만 보아도 어떤 답안인지 알 수 있다. (*)에서 $g(0)g(1) < 0$ 이기 때문에 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x) = 0$ 의 해가 적어도 하나 있다는 논리를 전개한 답안이다.

하지만 본 답안에는 사잇값 정리를 언급하지 않았다. 문제풀이의 핵심개념이기 때문에 치명적인 감점이 우려되는데, 과연 이 학생이 사잇값 정리를 몰랐을까?

전혀 그렇지 않다. 사잇값 정리를 몰랐다면 이런 풀이 방향을 떠올리지도 못했을 것이다.

사잇값 정리를 잘 알고 있고, 문제 풀이에 잘 활용했지만, 답안을 옮기는 과정에서 사잇값 정리에 대한 언급을 빼먹었기 때문에 감점의 가능성이 있는 답안이 되겠다.

우리는 수리논술 공부를 하며 문제를 많이 푸는 것도 중요하지만, 답안을 많이 써보면서 본인이 **위와 같은 실수**를 하지 않으며 답안을 쓸 수 있는지 꾸준히 확인을 해줘야 한다. (자가점삭¹³⁾의 중요성)

| 마찬가지로, 답안 논리에 필요 없는 부분은 되도록 작성하지 않도록 유념

위의 점삭 내용에서 물결로 밑줄 친 부분 (**)은 답안에 작성될 필요가 없다.

왜냐하면 사잇값 정리를 쓰기 위해서 미분까지 가능할 필요는 없기 때문이다. (연속만 보장되면 충분함)

언제 사잇값 정리가 먹히는지 잘 모르니까, 그냥 싹 다 적어놨네!

라고 판단될 수 있는 것이다.

뭐라도 더 쓰면 답안에 도움이 된다는 속설이 있는데, 이런 경우엔 오히려 본인 답안의 신뢰도를 떨어트리는 상황이 된다.¹⁴⁾

물론 이 내용은, 수리논술 합격을 위하여 꼭 해야 하는 사항(= 강제되는 사항)까지는 아니다.

‘논리에 필요 없는 부분은 작성 No’ 정도의 디테일은, 어차피 나의 경쟁자인 다른 학생들도 잘 신경 쓰지 못한다.

하지만, 이런 디테일까지 신경 써준다면 더 정확하고 체계적인 수학 공부를 평소에도 할 수 있는 원동력이 된다.

¹³⁾ 수능으로 치면 검토에 해당한다.

¹⁴⁾ 정확히 알지 못하기 때문에 아는 것을 다 썼다고 생각하게 됨

4. 풀이에 필요한 값들 혹은 보조정리들은 미리 구해두거나 증명해두기

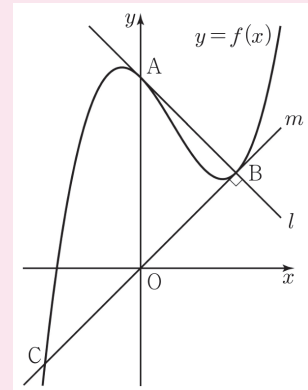
어떤 문제를 풀 때 자주 쓰이거나 논리 전개에 필요한 보조정리들을 **미리 증명한 후 네이밍**을 해준다면, 보다 더 깔끔한 답안을 쓸 수 있다. 다음 예제와 해설을 통해 확인해보자.

예제

제시문

(가) 삼차방정식 $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ 의 세 실근의 합은 $-\frac{\beta}{\alpha}$ 이다.¹⁷⁾

(나) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 가 y 축과 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 A에서의 접선을 l 이라 할 때, 직선 l 이 곡선 $y = f(x)$ 와 만나는 점 중에서 A가 아닌 점을 B라 하자. 또, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 B에서의 접선을 m 이라 할 때, 직선 m 이 곡선 $y = f(x)$ 와 만나는 점 중에서 B가 아닌 점을 C라 하자. 두 직선 l, m 이 서로 수직이고 직선 m 의 방정식이 $y = x$ 이다.



제시문 (가), (나)를 이용하여 $f(0)$ 의 값을 구하시오. (단, $f(0) > 0$ 이다.)

[사관학교]

연습지

¹⁷⁾ 참고로 삼차 이상 방정식에서의 근과 계수의 관계는 교과과정의 이지만, 교과과정이었던 시절이 워낙 길었기 때문에 교수님들은 교과과정으로 알고 출제하는 경우가 많다. 제시문으로 주어지지 않아도 삼차 이상 방정식에서의 근과 계수의 관계를 사용할 때, 굳이 따로 증명할 필요는 없다.

[SaP 추천 답안]

삼차함수 $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ 와 임의의 일차함수 $g(x) = px + q$ 에 대하여

방정식 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \alpha x^3 + \beta x^2 + (\gamma - p)x + (\delta - q) = 0$ 의 서로 다른 세 근의 합은 제시문 (가)에 의하여

p, q 에 관계없이 $-\frac{\beta}{\alpha}$ 로 항상 일정하다. …… ①

또한, 직선 $m : y = x$ 과 수직인 직선 l 의 기울기는 -1 이므로 $f'(0) = -1$ 임을 알 수 있다. …… ②

한편 직선 m 의 방정식이 $y = x$ 이므로, 점 B, C좌표를 $(b, b), (c, c)$ (단, $c' < 0 < b'$)라 하면

$y = f(x)$ 와 직선 l 을 연립한 방정식의 서로 다른 세 근의 합은 $0 + 0 + b = b$ 이다.

①에 의해 $y = f(x)$ 와 직선 m 을 연립한 방정식의 서로 다른 세 근의 합 역시 b 여야 하므로

$b + b + c = b, c = -b$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore f(x) - x &= (x - b)^2(x - c) \\ &= (x - b)^2(x + b)\end{aligned}$$

이고, 양변을 미분한 후 $x = 0$ 을 대입하면 $f'(0) - 1 = -b^2$ 이다.

$\therefore b = \sqrt{2}$ (\because ②) 이고 $f(0) = 2\sqrt{2}$ 이다.

[일반적인 답안]

직선 m 의 방정식이 $y = x$ 이므로, 점 B, C좌표를 $(b, b), (c, c)$ (단, $c < 0 < b$)라 하면

$y = f(x)$ 와 직선 l 을 연립한 방정식의 서로 다른 세 근의 합은 $0 + 0 + b = b$ 이다.

삼차함수 $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ 와 임의의 일차함수 $g(x) = px + q$ 에 대하여

방정식 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \alpha x^3 + \beta x^2 + (\gamma - p)x + (\delta - q) = 0$ 의 서로 다른 세 근의 합은 제시문 (가)에 의하여 p, q 에 관계없이 항상 일정하므로, $y = f(x)$ 와 직선 m 을 연립한 방정식의 서로 다른 세 근의 합 역시 b 여야 한다.

따라서 $b + b + c = b, c = -b$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore f(x) - x &= (x - b)^2(x - c) \\ &= (x - b)^2(x + b) \quad \dots\dots ③\end{aligned}$$

또한 직선 $m : y = x$ 과 수직인 직선 l 의 기울기는 -1 이므로 $f'(0) = -1$ 이다. 따라서

양변을 ③식을 미분한 후 $x = 0$ 을 대입하면 $f'(0) - 1 = -b^2$ 이다.

$\therefore b = \sqrt{2}$ 이고 $f(0) = 2\sqrt{2}$ 이다.

[SaP 추천 답안]에서는 수능에서 실전개념으로 자주 쓰이는 사실을 ①에서 증명해주고, $f'(0) = -1$ 임을 ②에서 미리 언급해준다면, 설명의 흐름을 끊지 않는 ‘매끄러운 답안’을 쓰기 좋다.

[일반적인 답안]에서는 ①과 ②에 대한 설명을 하느라 밑줄 친 부분이 필요했고, 이 부분이 약간 답안의 흐름을 끊는 느낌을 준다.

물론 두 답안 모두 논리적인 부족함은 없기 때문에 감점은 없다. 하지만 내 답안이 채점관에게 잘 읽히도록 쓰는 것만으로도 심리적 우위를 가져갈 수 있으니, 좋은 습관은 얼른 들여놓도록 하자.

CHAPTER

2

도형 성질 총망라

본격적으로 수학1의 삼각함수 단원을 다루기 전,
중학교 때 배웠던 도형의 성질들을 리마인드하고
수리논술에서만 등장하는 도형의 성질들을 새롭게 배워보자.

3. 해석기하 : 도형에서의 좌표평면 도입

도형을 그대로 좌표평면 위로 옮겨 푸는 방법은 수능과 달리 수리논술에서 더욱 자주 등장하는 도형 풀이법이다.

물론 수리논술에서도 자주 등장하는 유형은 아니지만, 수능 도형에만 익숙한 수험생이 제시문 없이 이런 유형의 문제를 만난다면 충분히 당황할 수 있다. 이 유형이 실제 문제로 출제된다면 어떤 느낌일지 예제를 통해 느껴보자.

✓ TIP

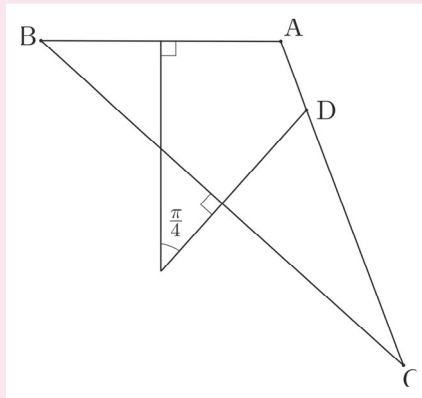
도형에서 좌표평면을 도입해야 하는 문제들은 보통 **문제의 시작부터 막히는 경우가 많다.**
도형 문제의 시작점이 도저히 보이지 않을 때 좌표평면을 도입해보자.

예제

제시문

(가) 코사인 법칙은 삼각형의 세 변의 길이를 알고 있는 경우 각의 크기를 구하는 데 사용된다.

(나) 아래 그림의 삼각형 ABC에서 변 AB의 수직이등분선과 변 BC의 수직이등분선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이다. 점 D는 변 AC를 1:3으로 내분하는 점으로, 변 BC의 수직이등분선은 변 AC와 점 D에서 만난다.



(나)에서 변 AC의 수직이등분선과 변 BC의 수직이등분선이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos \theta$ 의 값을 구하고 풀이 과정을 쓰시오.

[건국대]

연습지

좌표평면에 변 AB의 수직이등분선이 y 축, 변 BC의 수직이등분선이 직선 $y = x$ 가 되도록 놓자.

점 A의 좌표를 (a, b) ($a > 0, b > 0$)라 하면 점 B의 좌표는 $(-a, b)$, 점 C의 좌표는 $(b, -a)$ 가 된다.

점 D가 변 AC를 1:3으로 내분하므로 점 D의 좌표는 $\left(\frac{b+3a}{4}, \frac{-a+3b}{4}\right)$ 이다.

점 D가 직선 $y = x$ 위에 있으므로 $b+3a = -a+3b$ 가 성립한다. 이를 정리하면 $b = 2a$ 이다.

따라서 삼각형 ABC의 세 변을 a 로 나타내면 다음과 같다.

$$\overline{AB} = 2a$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-a-b)^2 + (b+a)^2} = \sqrt{2}(a+b) = 3\sqrt{2}a$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(a-b)^2 + (b+a)^2} = \sqrt{2(a^2+b^2)} = \sqrt{10}a$$

변 AC의 수직이등분선과 변 BC의 수직이등분선이 이루는 예각의 크기가 θ 이므로 $\angle ACB$ 의 크기 또한 θ 이다. 따라서 코사인 법칙을 이용하면 다음과 같다.

$$\cos \theta = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{2 \times \overline{AC} \times \overline{BC}} = \frac{10a^2 + 18a^2 - 4a^2}{2 \times (\sqrt{10}a) \times (3\sqrt{2}a)} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

제시문에서 아무런 힌트를 제시하지 않았어도, 위의 예제처럼 스스로 좌표평면을 도입할 수 있어야 한다.

위의 해설을 보면 알 수 있듯이, 도형을 있는 그대로 해석하려 할 때는 찾기 힘들었던 정보들이 도형에서 좌표평면을 도입하는 순간 발견되기 때문이다.

이와 같이 좌표평면을 도입하는 풀이만의 세 가지 장점이 있다.

- ① 점과 선분에 대한 좌표와 식을 알기 때문에 정보의 구체화가 가능하다. (예를 들자면 해설의 밑줄 부분)
- ② 계산의 자유도가 높아진다.
- ③ 답안 구성에서의 편리함이 있다.

이러한 장점들을 최대한 살리면서도 계산의 난이도는 대폭 낮추기 위해, 도형에서 좌표평면을 도입할 때 원점과 축(= 기준)을 설정하는 TIP을 소개하겠다. 이를 잘 읽어본 후, 위의 예제 해설에서도 TIP의 방법이 잘 사용되었는지 TIP과 함께 확인하며 학습하자.

✓ TIP

| 좌표평면을 도입하는 방법²⁸⁾

도형에서 좌표평면을 도입할 때, 원점과 축 (= 기준)을 다음과 같이 설정하면 계산량을 낮출 수 있다.

- ① 도형에서 대칭성이 나타나는 부분이 있다면, 그 부분을 원점 혹은 축 대칭에 맞춰 설정한다.
- ② 도형에서 y 축 혹은 x 축으로 사용할 선분을 찾은 후, 이에 맞춰 원점을 설정한다.
- ③ 내심원이 등장한다면 내심원의 중심을 원점으로 설정하자.

28) 저자의 경험과 분석을 바탕으로 만든 TIP이니, 웬만하면 이 방법을 사용하길 바란다.

| ??? : 그렇다면 무조건 좌표평면을 도입하는게 좋은 태도 아닌가요?

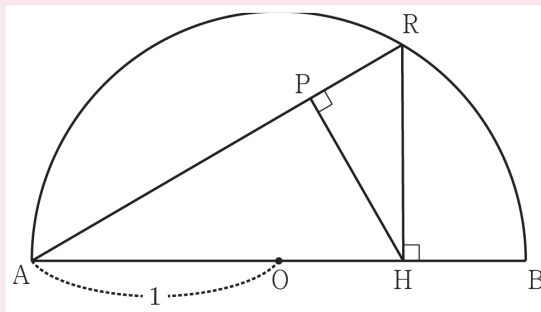
이 방법은 내가 아는 모든 방법을 동원해도 도형 문제의 시작점이 보이지 않을 때 최후의 보루로 사용하는 것이 좋다. 좌표평면을 도입하는 풀이는 계산의 자유도가 높은 만큼 계산량이 폭발적으로 증가할 수도 있기 때문이다.

다음 예제를 풀어본 후 해설을 살펴보자. 좌표평면의 도입 없이 푸는 풀이와 좌표평면을 도입하여 푸는 풀이 모두 수록했으니, 위에서 언급한 계산량의 차이를 몸소 느껴볼 수 있을 것이다.

예제

제시문

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 점 O는 선분 AB의 중점이다. 호 AB 위의 한 점 R에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 H에서 선분 AR에 내린 수선의 발을 P라 하자.



R가 A에서 B까지 호 AB위를 움직일 때, 선분 OP의 길이의 최솟값을 구하시오.

[한양대]

연습지

[좌표평면을 도입하는 풀이]- 대학 제공 답안

지름의 양 끝점이 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ 가 되고, 호 AB 가 x 축 윗부분에 오도록 반원을 좌표평면에 두자.

$\angle ROB = t$ ($0 \leq t \leq \pi$) 라 하면, $R(\cos t, \sin t)$, $H(\cos t, 0)$ 이라 할 수 있다.

$0 < t < \pi$ 일 때, 두 점 $A(-1, 0)$, $R(\cos t, \sin t)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 0 = \frac{\sin t - 0}{\cos t - (-1)}(x - (-1))$$

이고, 점 H 를 지나고 선분 AR 에 수직인 직선의 방정식은

$$y - 0 = -\frac{1 + \cos t}{\sin t}(x - \cos t)$$

이다. 점 P 는 이 두 직선의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립²⁹⁾해서 풀면, 점 $P(x, y)$ 의 좌표는 아래와 같이 주어진다.

(연립하는 과정을 본 답안에선 생략해서 그렇지, 이 부분에서 계산량이 꽤 된다.)

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\cos^2 t + 2\cos t - 1) \\ y = \frac{1}{2}\sin t(1 + \cos t) \end{cases} \quad (t = 0 \text{이면 } P = B, t = \pi \text{이면 } P = A \text{ 이다.})$$

따라서

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left\{\frac{1}{2}(\cos^2 t + 2\cos t - 1)\right\}^2 + \left\{\frac{1}{2}\sin t(1 + \cos t)\right\}^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}(\cos^3 t + \cos^2 t - \cos t + 1)} \end{aligned}$$

이고 $f(t) = \cos^3 t + \cos^2 t - \cos t + 1$ 이라 하면, $f'(t) = -\sin t(\cos t + 1)(3\cos t - 1)$ 이고,

$0 \leq t \leq \pi$ 일 때 $-1 \leq \cos t \leq 1$ 이므로, $f(t)$ 의 최솟값은 $t = \alpha$, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ 일 때, $f(t) = \frac{22}{27}$ 이다.

따라서, 구하는 \overline{OP} 의 최솟값은 $\sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{22}{27}} = \frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{33}}{9}$ 이다.

[Comment]

놀랍게도 위의 풀이는 대학에서 공식적으로 제공한 풀이다.

²⁹⁾ 계산하기로 마음 먹었다면 겁먹지 말고 그냥 하면 된다. 모든 계산은 항상 ‘어떻게든 계산하면 무조건 답 나온다.’라는 생각을 갖고 시작하는 것이 핵심!

[좌표평면을 도입하지 않는 풀이 1] - 삼각비와 코사인법칙의 이용

$\angle RAB = \theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ 라 하면 $\angle RHP = \angle BRH = \theta$ 이므로,

$$\overline{BR} = 2 \sin \theta, \overline{RH} = 2 \sin \theta \cos \theta, \overline{PH} = 2 \sin \theta \cos^2 \theta$$

이다.

이때, $\overline{AR} : \overline{AP} = \overline{BR} : \overline{PH} = 1 : \cos^2 \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \overline{AR} \times \cos^2 \theta \\ &= 2 \cos^3 \theta \end{aligned}$$

이다.

삼각형 AOP 에서 코사인법칙을 이용하면

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \sqrt{(1)^2 + (2 \cos^3 \theta)^2 - 2 \times (1) \times (2 \cos^3 \theta) \times \cos \theta} \\ &= \sqrt{4 \cos^6 \theta - 4 \cos^4 \theta + 1} \end{aligned}$$

이다.

$\cos^2 \theta = t (0 \leq t \leq 1)$ 로 치환하여 $4t^3 - 4t^2 + 1$ 의 최솟값을 구하자. 미분하여 계산하면

$4t^3 - 4t^2 + 1$ 은 $t = \frac{2}{3}$ 에서 극솟값이자 최솟값 $\frac{11}{27}$ 을 갖는다. ($t = 0$ 과 $t = 1$ 에서의 함숫값 비교는 생략³⁰⁾)

따라서, 구하는 \overline{OP} 의 최솟값은 $\sqrt{\frac{11}{27}} = \frac{\sqrt{33}}{9}$ 이다.

30) 해설에서는 생략했지만, 답안에서 닫힌구간 내 최댓값 혹은 최솟값을 구할 때는 반드시 구간 양끝의 함숫값 비교를 해야 한다.
구간 양끝의 함숫값이 최댓값 혹은 최솟값이 될 수 있기 때문이다. (풀이는 언제나 꼼꼼하게!)

앞의 두 해설의 계산량의 차이, 심지어 발상 난이도의 차이까지도 독자 스스로 잘 느낄 수 있을 것이다.

이 예제의 핵심을 다시 한번 정리해보면 다음과 같다.

도형에서 좌표 풀이법은 내가 아는 모든 방법을 동원해도 도형 문제의 시작점이 보이지 않을 때 사용한다.
이를 선불리 사용한다면 역효과로 문제의 체감 난이도를 올리는 꼴이 될 수 있기 때문이다.

앞으로 도형 문제를 만났을 때, 이 점을 항상 유의하며 풀이법을 선택하자.

| One More Thing

이 예제를 마무리 하기 전에, 앞에서 배웠던 할선 정리를 이용한 또 다른 풀이 한 가지를 소개하겠다.

미리 말하지만 다음 풀이를 읽고 ‘이런 생각을 하는 건 너무 발상적인데? 이런 것까지 해야해?’라고 생각하지 말자.
이러한 발상은 공부해두는 순간, 공부해두지 않은 학생들보다 앞서나갈 수 있는 발상이다.³¹⁾

수학을 잘하는 사람들에게겐 이미 Well - known인 발상이므로, 잘 구경해두도록 하자.

31) 발상의 수집이 곧 수리논술 실력의 기반이 된다.

[좌표평면을 도입하지 않는 풀이 2] - 할선정리의 이용

$\angle RAB = \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)라 하고, 선분 OP의 길이의 길이를 l 라 하자.

선분 AB를 지름으로 하는 원과 직선 OP가 원과 만나는 두 점을 생각해보자.

점 P를 두 선분의 교점으로 생각해 할선 정리를 사용하면³²⁾

$$\begin{aligned}(1-l)(1+l) &= \overline{PR} \times \overline{PA} \\ &= 2\sin^2\theta \cos\theta \times 2\cos^3\theta \\ &= 4(1-\cos^2\theta)\cos^4\theta \\ &= -4\cos^6\theta + 4\cos^4\theta\end{aligned}$$

이고, 정리하면 $l = \sqrt{4\cos^6\theta - 4\cos^4\theta + 1}$ 이다.

$\cos^2\theta = t$ ($0 \leq t \leq 1$)로 치환하여 $4t^3 - 4t^2 + 1$ 의 최솟값을 구하자. 미분하여 계산하면

$4t^3 - 4t^2 + 1$ 은 $t = \frac{2}{3}$ 에서 극솟값이자 최솟값 $\frac{11}{27}$ 을 갖는다.

따라서, 구하는 \overline{OP} 의 최솟값은 $\sqrt{\frac{11}{27}} = \frac{\sqrt{33}}{9}$ 이다.

[Comment]

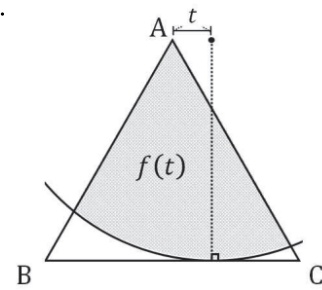
반원과 한 선분이 주어졌을 때, 선분을 연장시켜 원과 함께 해석하는 아이디어는 수능에서도 많이 등장하지 않아 익숙하지 않을 것이지만, 다음과 같은 사고 과정을 거치면 좀 더 친숙해질 것이다.

반지름의 길이 안다 = 지름의 길이 안다 = 제일 긴 현(=지름)의 길이 안다 = 현의 길이? 할선 정리!

반지름의 길이를 알고 원의 중심을 지나는 상황일 때 유용한 아이디어이며, 예제의 상황과 달리 연장시킨 선분이 원의 중심을 지나지 않는 경우에는, 이등변 삼각형을 만든 후 원의 중심에서 연장시킨 선분에 수선의 발을 내려서 해석하면 된다.

32) 스스로 할선 정리 풀이를 떠올렸다면 칭찬합니다~

높이가 1인 정삼각형 ABC 의 꼭짓점 A 를 중심으로 하고 변 BC 에 접하는 원이 있다. 오른쪽 그림과 같이 이 원을 직선 BC 에 접한 채 거리 t 만큼 ($0 < t < 1$) 평행이동한 원과 변 AB , 변 AC 로 둘러싸인 도형의 넓이를 $f(t)$ 라고 하자. 이때, 도함수 $f'(t)$ 를 구하시오.



연습지

CHAPTER

4

수열 & 시그마의 활용

논술용 수열 & 시그마 문제 풀이를 위한 마인드를 연습해보자.
일부 파트에서는 수능과 달리 '어떤 영특한 아이디어'가 필요로 하므로,
여러 기출들을 풀어보면서 이런 아이디어들을 집중 흡수하도록 하자.

수열의 최대/최소 판별법

1. 미분을 활용한 수열의 최대최소 판별

수열은 '자연수 집합을 정의역으로 하고 실수 집합을 공역으로 하는 함수'다.

함수에서 최대최소 판별은 일반적으로 미분을 활용하기 때문에, 함수의 일종인 수열의 최대최소 역시 미분을 활용하는 방법이 일감으로 떠오르는게 당연하지만, 이따금 한계에 부딪치기도 한다.

예를 들어 수열 $a_n = n^4 - 3n^3 + 9$ 의 최솟값을 찾는 문제가 있다고 하자.

$f(x) = x^4 - 3x^3 + 9$ 을 미분하면 $4x^3 - 9x^2 = 0$, $x = \frac{9}{4}$ 에서 유일한 극소이므로 최소!! 라고 하고 싶은데, 수열에서의 n 은 자연수라는 점이 문제가 된다. 수열의 정의역 때문에 $a_{\frac{9}{4}}$ or a_0 가 최솟값이라고 주장할 수 없기 때문이다.

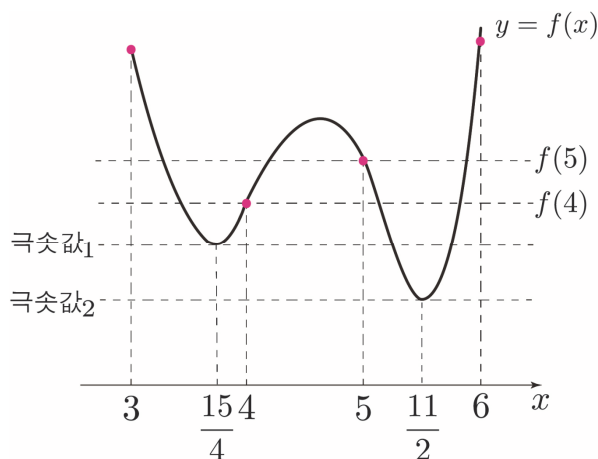
물론 해결법은 있다. $x = \frac{9}{4}$ 주변의 자연수 $x = 2, 3$ 에서의 수열값을 계산한 후 제일 작은 것을 정답으로 채택하면 된다.

위 문제에선 극소가 $x = \frac{9}{4}$ 에서만 극소이기 때문에 a_2, a_3 만 비교하면 되지만, 극소가 여럿 존재하는 문제라면 조사해야하는 자연수의 개수가 2 배씩 증가하고, 이것이 미분으로 수열의 최대최소를 찾는 풀이의 최대 약점이다.

| 흔히 저지르는 오개념에 대하여

이번 Part에서 생길 수 있는 오개념에 대해 알아보자.

어떤 수열 $a_n = f(n)$ 의 최솟값을 묻는 문제이고, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다고 하자.



극솟값이 두 개 있고 극소가 되는 x 가 $\frac{15}{4}, \frac{11}{2}$ 로 자연수가 아니므로 두 수의 주변에 있는 자연수인 3과 4,

그리고 5와 6에 대한 a_n 값을 조사해줘야 수열의 최솟값을 구할 수 있는데,⁴⁶⁾ 이 4개 값의 비교가 귀찮은 어떤 학생이 다음과 같은 질문을 한다.

46) 이번엔 $2 \times 2 = 4$ 개의 수열값을 비교해야 되므로, 이 문제 역시 미분풀이의 단점이 부각된다.

Q. a_n 의 최솟값을 찾는 문제니까, 다 조사할 필요 없이 극솟값 중 제일 작은 극솟값을 갖는 수 주변의 자연수만 조사해도 충분하지 않을까요??

A. 그러면 안된다. 그 논리에 의하면 a_5, a_6 중에 최솟값이 있어야 할 것 같지만 그래프에서 볼 수 있듯이 a_4 가 제일 작은 값이다. 즉, 아무리 잔피를 굴려봐도 결국 최종적으로 수열값을 조사해야하는 n 의 개수는 ' $2 \times$ 극솟점 개수'로 고정이고, 이게 미분 풀이의 단점 (=다수의 연산 동반)이다.

2. 부등식을 활용한 최대최소 판별

이러한 미분 풀이를 대체⁴⁷⁾하는 풀이는 일명 '전국 1등은 전교 1등 중에 있다.' 풀이이다. (?!)

수열의 최댓값을 찾는 문제가 있을 때, a_n 이 최대가 되는 n 은 두 부등식 $a_{n-1} \leq a_n$ 과 $a_{n+1} \leq a_n$ 을 우선 만족시켜야 한다. 주변에 있는 a_{n-1}, a_{n+1} 보다 작으면서 어떻게 전체 1등인 값이 될 수 있겠는가?

즉, 저 두 부등식을 풀어 n 을 얻어내는 것은 전교 1등들을 우선적으로 고르는 작업에 해당한다.

이렇게 얻어낸 n 을 a_n 에 대입한 후 그 중 제일 큰 값을 찾으면, 그게 a_n 의 최댓값이 된다.⁴⁸⁾ 전교 1등들 중 전교 1등을 찾는 과정인 것이다.

반대로 a_n 이 최소가 되는 n 은 두 부등식 $a_{n-1} \geq a_n$ 과 $a_{n+1} \geq a_n$ 을 우선 만족시켜야 한다.

이전 그래프의 예로 본다면 이 부등식의 해는 $n = 4$ 로 유일함을 알 수 있다.⁴⁹⁾

단순히 생각하면 해야 할 연산이 미분 풀이보다 4 배나 줄어드는 것이다!

물론 저 부등식을 만족시키는 n 역시 여러 개가 있을 수 있지만, 미분 풀이 때보다 그 개수가 덜 나온다는 것이 Fact. 따라서 미분 풀이와 부등식 풀이 모두 숙지해 두도록 하자.

TIP

| 부등식 풀이의 구조

부등식 풀이를 너무 어렵게 생각하지 말자. 부등식 풀이는 단순히

a_n 과 a_{n+1} 의 비교(= 부등식의 작성 = a_n 의 증감을 파악) \rightarrow 최대/최소 후보 찾기 \rightarrow 최대/최소 최종결정

임을 기억하면 된다.

미분 풀이와 계산 방법만 다를 뿐, ' a_n 의 증감을 파악하여 최대/최소를 구한다'는 방향성은 같다!

47) 수열의 일반항이 미분 불가능한 식이 나올 때도 있다. 미분불능이 아니고 그냥 미분하기가 까다로운 식. 이번 챕터의 문제에서 곧 구경할 예정이다.

48) 부등식을 만족시키는 n 은 최대/최소 지점이 아닌, 최대/최소 후보지점임을 꼭 기억하자.

49) 부등식 풀이는 그래프 전부를 보는 것이 아닌 수열값이 찍힌 점(색점)들만 비교하면 된다.

예제

자연수 n 에 대하여 한 변의 길이가 $n^2 - 12n + 37$ 인 정사각형의 넓이를 a_n , 한 변의 길이가 $2n + 1$ 인 정사각형의 넓이를 b_n 이라고 하자. $\frac{a_n}{b_n}$ 이 최소가 되는 n 을 구하고, 이때 $\frac{a_n}{b_n}$ 의 값을 구하시오.

[한양대]

연습지

[미분 풀이] - 대학 제공 해설

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(n^2 - 12n + 37)^2}{(2n + 1)^2} = \left(\frac{n^2 - 12n + 37}{2n + 1} \right)^2$ 이므로 $\frac{a_n}{b_n}$ 이 최소가 되려면 $\frac{n^2 - 12n + 37}{2n + 1}$ 이 최소가 되어야 한다.

$$f(x) = \frac{x^2 - 12x + 37}{2x + 1} \text{ 라 하면 } f'(x) = \frac{(2x - 12)(2x + 1) - (x^2 - 12x + 37) \times 2}{(2x + 1)^2} = \frac{2(x^2 + x - 43)}{(2x + 1)^2}$$

$x^2 + x - 43 = 0$ 의 $x > 0$ 에서의 근을 구하면 $x = \frac{-1 + \sqrt{173}}{2}$ 이다.

$0 < x < \frac{-1 + \sqrt{173}}{2}$ 일 때 $f'(x) < 0$ 이고, $x > \frac{-1 + \sqrt{173}}{2}$ 일 때 $f'(x) > 0$ 이므로 $x = \frac{-1 + \sqrt{173}}{2}$

에서 $f(x)$ 가 최소가 되는 것을 알 수 있다.

한편, $13 < \sqrt{173} < 14$ 를 이용하면 $6 < \frac{-1 + \sqrt{173}}{2} < \frac{13}{2} < 7$ 임을 알 수 있다.

따라서, $n = 6$ 또는 $n = 7$ 인 경우 $\frac{a_n}{b_n}$ 가 최소가 된다.

$\frac{a_6}{b_6} = \frac{1}{13^2} < \frac{4}{15^2} = \frac{a_7}{b_7}$ 이므로 $n = 6$ 일 때 최솟값 $\frac{a_6}{b_6} = \frac{1}{13^2}$ 을 갖는다.

[부등식 풀이] - SaP 추천 풀이

$c_n = \frac{n^2 - 12n + 37}{2n + 1}$ 로 두자. c_n 이 최솟값이 되기 위해서는 먼저 부등식 $c_{n-1} \geq c_n$ 을 만족시켜야 한다.

$c_{n-1} = \frac{n^2 - 14n + 50}{2n - 1}$ 이므로 부등식 $\frac{n^2 - 14n + 50}{2n - 1} \geq \frac{n^2 - 12n + 37}{2n + 1}$ 을 풀면,

$$\begin{aligned} (n^2 - 14n + 50)(2n + 1) &\geq (n^2 - 12n + 37)(2n - 1) \\ \Leftrightarrow 2n^3 - 27n^2 + 86n + 50 &\geq 2n^3 - 25n^2 + 86n - 37 \end{aligned}$$

이고, 이를 정리하면 $2n^2 \leq 87$ 이므로 이 부등식을 만족시키는 자연수 n 은 $1 \leq n \leq 6$ 이다.

한편, c_n 이 최솟값이 되기 위해서는 부등식 $c_n \leq c_{n+1}$ 또한 만족시켜야 한다. 위와 같은 방법으로 부등식을 정리하면, $2(n+1)^2 \geq 87$ 이므로 이 부등식을 만족시키는 자연수 n 은 $n \geq 6$ 이다.

따라서, 두 부등식을 동시에 만족시키는 자연수 n 은 6 뿐이므로 c_n 이 최소가 되는 n 의 후보 역시 6 뿐이다.

따라서 $n = 6$ 일 때 최소이다.

(만약 두 부등식을 동시에 만족시키는 n 이 여러 개 있다면, 미분 풀이 때처럼 일일이 대입해서 확인해줘야 한다.)

제시문 일부

(나) n 이 자연수일 때, 다음 식이 성립한다.

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b^1 + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_ka^{n-k}b^k + \cdots + {}_nC_nb^n$$

(라) $(5+2x)^{60}$ 을 전개했을 때 x^k 의 계수를 a_k 라 하자. 즉,

$$(5+2x)^{60} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + \cdots + a_{60}x^{60}$$

제시문 (라)에서 계수 a_k ($0 \leq k \leq 60$) 중 가장 큰 것을 a_p , 두 번째로 큰 것을 a_q 라 하자.

제시문 (나)를 이용하여 p 와 q 를 구하고 풀이 과정을 쓰시오.

연습지

CHAPTER

6

고난도 추가 문제

지금까지 학습했던 모든 CHAPTER의 내용에 대한 고난도 추가 문제입니다.
저자진이 본 교재에서 공을 제일 많이 들인 것이 바로 본 챕터의 해설 파트입니다.
문제가 어렵더라도 해설을 참고하여 학습하신다면
수리논술 실력이 엄청나게 스텝-업할 것이라 확신합니다.

고난도 추가 문제 가이드

1. 문제 선정 기준과 해설 구성

추가 문제 8문항은 다음 두 가지를 기준으로 삼고 수록하였습니다.

1. 문제에서 배워야 할 중요한 학습 Point가 대학 제공 해설에서 파악하기 힘든가?

그리고

2. 문제 자체의 발상이 어렵거나 난이도가 높은 문항, 또는 풀이 여부보다 도전과 배움 자체에 의미를 둔 문항인가?

위 두 기준의 특성상, 앞의 문제들⁷⁴⁾과는 다른 해설 구성이 필요하다고 생각하여

대학 제공 해설 ⊕ Show and Prove's 해설 ⊕ Comment ⊕ 최종답안

로 해설을 구성하였습니다.

① 대학 제공 해설 : 오피셜 답안입니다. 정답, 구체적인 계산 과정 확인 등 단순 참고만 하면 되겠습니다.

② Show and Prove's 해설 : 문제를 완벽하게 이해할 수 있도록 저자가 직접 작성한 해설입니다.

추가 문제의 학습에서 Main을 담당하는 파트이니, 정답 여부에 상관없이 꼭 읽어보시길 바랍니다.

③ Comment : 문제를 마무리하며 읽어봤으면 하는 것들을 적어두었습니다.

이 또한 정답 여부에 상관없이 꼭 읽어보시길 바랍니다.

④ 최종답안 : 모든 Tip, 해설, Comment를 총망라한 완벽한 답안으로써, 지향하여야 할 미래의 실전 답안입니다.

다수의 문제를 손글씨 답안으로 구성하여 리얼함을 강조하였습니다.

⁷⁴⁾ 앞의 문제들은 대학 제공 해설만으로도 90% 이상의 학습이 가능하다고 판단한 문항들입니다.

나머지 10%에 대한 학습은 해설편을 보면 알 수 있다시피, 간단한 [Comment]를 수록하여 학습의 공백을 채웠습니다.

2. 고난도 추가 논제 학습 방법

아래의 과정을 논제 1개 단위로 반복하며 학습하면 좋습니다.

- ① 지금까지 배웠던 내용들을 떠올리며 **시간 제약 없이** 문제를 푼다.
- ② 문제를 완전히 못 풀었더라도, 충분히 시간을 투자했다는 생각이 들었을 때 해설편을 펼친다.
- ③ 정답 여부와 관계 없이, **[Show and Prove's 해설]**과 **[Comment]**를 정독한다.

고난도 추가 논제 풀어보기

논제 1

★★★★☆

서울시립대 모의

모든 자연수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{n^n \times n!}{(2n)!} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$$

연습지

제시문

(가) 수열 $\{a_n\}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

- (ㄱ) $a_1 = 0$
- (ㄴ) 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < a_{n+1}$ 이다.
- (ㄷ) 실수 x 가 $a_n < x < a_{n+1}$ 일 때, 집합

$$\left\{ \frac{1}{k} \ln \frac{k}{x} \mid 1 \leq k \leq 5n, k \text{ 는 자연수} \right\}$$

의 원소 중 최댓값은 $\frac{1}{n} \ln \frac{n}{x}$ 이다.

(나) 제시문 (가)의 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 급수의 값 S 를 다음과 같이 정의한다.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{a_{n+1}}{n} \right)^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{a_n}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \right\}$$

제시문 (나)의 S 의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

연습지
